٢/٣ محاضرة رقم (٦)

$* \quad f(z) = u + iv$.

a) f is analytic function if :-

$u_x = v_x \quad , \quad u_y = -v_x$

b) f is Polar if :-

$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad , \quad v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$

c) f is harmonic if :-

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$

Ex: show that if $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ is analytic then $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are harmonic.

Ex: show that if $f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$ is analytic then $u(r,\theta)$ and $v(r,\theta)$ are harmonic

sol

analytic fn:

$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$, $v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$

Harmonic fn :-

$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$??

* $u_r = \frac{1}{r} v_\theta$ & $v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$ $\Leftarrow$ analytic الدالة

$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$ كي تكون الدالة (harmonic)

تفاضل بالنسبة لـ r

ونعوض عن $v_{\theta r}$

تفاضل بالنسبة لـ r

$\Rightarrow r u_r = v_\theta$

$r u_{rr} + u_r = v_{\theta r} \longrightarrow (1)$

$\Rightarrow r v_r = -u_\theta$

$\cancel{r u_{\theta r} = -u_{\theta\theta}}$ $r v_{\theta r} = -u_{\theta\theta}$

$v_{r\theta} = \frac{-1}{r} u_{\theta\theta} \longrightarrow (2)$

$v_{r\theta} = v_{\theta r}$ with (1), (2)

$r u_{rr} + u_r = \frac{-1}{r} u_{\theta\theta}$

$$\boxed{\therefore r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0}$$ #

2 كيفية حساب جزء من $f(z)$ بدلالة الآخر :-

$f(z) = u + iv \quad , \quad u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$

← معنى هذه الفكرة: أن يعطى u والمطلوب حساب قيمة v أو العكس.

u معلوم ، v مجهول

$v_y = u_x$ دالة في x

ثم تكامل بالنسبة لـ y جزئياً

ونجعل ثابت التكامل $C_1(x)$

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dy + C_1(x)$$

ونحصل على ثابت التكامل باستخدام الشرط الثاني بنفس طريقة التفكير.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

<u>Ex1:</u> show that $u = x^2 - y^2 - y$ harmonic and find Conjugate harmonic

<u>sol</u>

$u_x = 2x \qquad u_{xx} = 2$

$u_y = -2y - 1 \qquad u_{yy} = -2$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \therefore u$ is harmonic

$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$

$v_y = 2x$

$v = \int 2x \, dy + c_1(x) = 2xy + c_1(x) \longrightarrow (1)$

$u_y = -v_x$

$-2y - 1 = -(2y + c_1'(x))$

← هذه الخطوة نعرف منها هل الخطوات صحيحة أم هناك خطأ.

$c_1'(x) = 1$

$c_1(x) = x + c$

بالتعويض في (1)

$$\boxed{v = 2xy + x + c}$$

Ex2: if $u = e^{2x} \cos ay$ is a real part of analytic f^n find the value of a and its conjugate harmonic.

Sol

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = 2 e^{2x} \cos(ay)$, $u_y = e^{2x} (-a \sin(ay))$

$u_{xx} = 4 e^{2x} \cos(ay)$, $u_{yy} = -a^2 e^{2x} \cos(ay)$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$(4 - a^2) e^{2x} \cos(ay) = 0$

$\cos ay = 0 \Rightarrow ay = \frac{(2n \pm 1)\pi}{2}$, only $e^{-\infty} = 0$.

$4 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$

$u = e^{2x} \cos(2y) \longrightarrow (1)$

$u_x = v_y \quad , \quad v_x = -u_y$

$v_y = 2e^{2x} \cos(2y)$

$v = \frac{2e^{2x} \sin 2y}{2} + C_1(x)$

$v_x = -u_y$

$v_x = 2e^{2x} \sin(2y) + C_1'(x) = -(-e^{2x} 2 \sin 2y)$

$C_1'(x) = 0 \implies C_1(x) = c$

$\boxed{\therefore v = e^{2x} \sin(2y) + c}$

<u>Ex3</u>: ① suppose $f(z)$ and $f'(z)$ are analytic then $f(z)$ = constant.

② show that if $f(z)$ is analytic $f(z) = u + iy$, and $|f(z)| = C_1$ then $f(z)$ = constant.

$\boxed{3}$ show that if $f(z) = u + iv$ is analytic then $\nabla^2 |f(z)|^2 = 4 \left| \frac{df}{dz} \right|^2$.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \boxed{c_1 + i c_2}$$

Sol

$$f(z) = u + iv$$

$$|f(z)| = c_1 \Rightarrow \sqrt{u^2 + v^2} = c_1$$

$$\therefore u^2 + v^2 = c_1^2 \longrightarrow (1)$$

المطلوب نوضح أن ثابت = u و الثابت = v.

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

$$u^2 + v^2 = c_1^2$$

نفاضل (1) بالنسبة لـ x

$$2uu_x + 2vv_x = 0$$

$$uu_x + vv_x = 0 \longrightarrow (2)$$

← نفاضل (1) بالنسبة لـ y

$$2u\,u_y + 2v\,v_y = 0$$

$$u\,u_y + v\,v_y = 0 \longrightarrow (3)$$

$$u\,u_y + v\,u_x = 0 \longrightarrow (4) \quad \text{because } v_y = u_x$$

← نضرب رقم (2) * u ، رقم (4) * v ونجمعهم

$$\therefore u^2 u_x + \cancel{u v\, v_x + u v\, u_y} + v^2 u_x = 0$$

$$\hookrightarrow v_x = -u_y$$

$$\therefore (u^2 + v^2)\, u_x = 0$$

$$u^2 + v^2 = c_1 \qquad \therefore u_x = 0 \Rightarrow u = c_1(y)$$

$$\cancel{\Rightarrow v = c_2(x)}$$

$$v_y = 0 \Rightarrow v = c_2(x)$$

ـ نضرب ① * v ، ④ * u ونطرحهم :-

$$(u^2 - v^2)\, v_x = 0$$

$u = \pm v \Rightarrow u = \text{Constant}, \; v = \text{constant}$

<u>or</u> $v_x = 0 \Rightarrow v = C_3(y)$

$\therefore C_3(y) = C_2(x) \quad \therefore = \text{Constant}$

$v = \text{Constant}$

$\pm v_x = u_y = 0 \Rightarrow u_y = 0$

$C_4(x) = C_1(y) = \text{Constant}$

$\therefore f = u + iv = \text{constant}$

where u, v are Constant.

Ch3 : Elementary Complex Function

<u>في هذا الجزء :-</u>

- نحاول تجميع الخواص الهامة للدوال القياسية
- يعني هنجمع الباب الأول والثاني (مفيش معلومة جديدة)

$\boxed{1}$ Polynomial :-

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \cdots\cdots + a_0$$

فئة الأعداد المركبة

the function is entire

$\boxed{2}$ Exponential fn :- ~~[illegible] analytic [illegible]~~

$f(z) = e^z$ is entire

$\boxed{3}$ ~~[illegible]~~ Logarthmic fn :-

$$Ln(z) = Ln(r e^{i(\theta \pm 2n\pi)})$$

$$Ln(x+iy) = Ln\, r + i(\theta \pm 2n\pi)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

at $n=0$ the value is a principle value.

EX: Evaluate

$\boxed{1}$ $\ln(1+i)$ ② $(1+i)^{1+i}$

$\boxed{3}$ the roots of $e^{z}+1=0$ is $|z|<10$

Sol

$\boxed{1}$

$x=1$, $y=1$, $r=\sqrt{2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{1}=45^\circ$

$$\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi\right)$$

② $z=(1+i)^{1+i}=e^{\ln(1+i)^{(1+i)}}$

$$=e^{(1+i)\ln(1+i)}$$

$$\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi\right)$$

$$e^{(1+i)\left[\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi\right)\right]}$$

$$= e^{\ln z-\left(\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi\right)} \cdot e^{i\left[\ln\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi\right)\right]}$$

$$= e^{\ln z-\left(\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi\right)} * \left[\cos\left[\ln\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi\right)\right] + i\sin\left[\ln\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi\right)\right]\right]$$

$\boxed{3}$ $e^{z}+1=0 \quad ; \quad |z| \leq 10$

$e^{z}=-1$

$z=\ln(-1)$

$x=-1 \quad , y=0 \quad , r=1 \quad , \theta=\pi$

$z=\ln(1)+i\left(\pi \pm 2n\pi\right)$

$$Z_n = i\,(1 \pm 2n)\,\pi$$

~~لمعرفة القيم الذي تقع فيه~~

ـــ لمعرفة القيم التي تقع داخل الدائرة بدون رسم نعوض عن قيم n ونجيب المقياس لو طلع أقل من (10) يبقى داخل الدائرة ولو أكبر من (10) يكون خارج الدائرة.

$n = 0 \Rightarrow Z_0 = i\pi \in D$ D: Desk

$n = 1 \Rightarrow Z_1 = i3\pi \in D$

$n = -1 \Rightarrow Z_{-1} = i\pi \in D$

$n = -2 \Rightarrow Z_{-2} = -i3\pi$